International Science and Technology Journal
المجلة الدولية للعلوم والتقنية

Volume 35 العدد
Part 1 المجلد
October 2024 اكتوبر

المجلة الدولية للعلوم والتقنية
International Science and Technology Journal
ISTJ

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/ 2024م

تطبيقات نظرية البواقي لحساب بعض أنواع من التكاملات الحقيقية المعتلة

http://www.doi.org/10.62341/ampt2035

أمل علي
جامعة الزاوية–كلية التربية أبو عيسى
am.abdullah@zu.edu.ly

الملخص

يقدم هذا البحث تعريفا لأهم النظريات في التحليل المركب وتسمي بنظرية البواقي والتي تمتلك العديد من التطبيقات والاستخدامات في حساب التكاملات على المسار لان نظرية البواقي لا نستطيع تطبيقها الا على تكاملات المسار، ومنه فيجب تحويل التكامل الحقيقي الي تكامل مركب لنستطيع الاستفادة من نظرية البواقي.

نظرية البواقي يمكن تطبيقها على المنحنيات العديدة الاتصال و كذلك على عدد لانهائي من النقاط الشاذة المعزولة، و يمكن تطبيقها أيضا على التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ فانه يسمي بالقيمة الاساسية لكوشي بشرط وجود النهاية في الطرف الأيمن للتكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$ ، و كذلك التكاملات المعتلة المشتملة على دوال مثلثية فان نظرية البواقي تكون مفيدة في حساب هذه التكاملات التي على الصورة $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin xdx$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos xdx$ ، و التكامل المعتل على الصورة $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$ حيث $p(x)$, $q(x)$ كثيرتي حدود حقيقية ليس بينهما عوامل مشتركة و أن $q(x)$ ليس لها أصفار حقيقية، فيمكن حساب قيمة التكامل بسهولة و ذلك بإيجاد قيمة كوشي الأساسية للتكامل باستخدام نظرية البواقي، و تكاملات الدوال متعددة القيم عند استخدام نظرية البواقي يجب أن نختار منطقة تكون دالة التكامل بداخلها

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

وحيدة القيمة، و كذلك تطبيق نظرية البواقي لحساب التكاملات الحقيقية التي تتضمن نقط تفرع و فروع قاطعة وتكون على الصورة $\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1} dx, 0 < a < 1$ و هذا التكامل ذو أهمية خاصة في دراسة دالة جاما. أوصي بإكمال هذا البحث للوصول الى تطبيقات جديدة لهذه النظرية لأهميتها في مجالات الرياضيات والعلوم الاخرى، وكذلك دراسة تطبيقاتها على الدوال الشبه تحليلية.

الكلمات المفتاحية: (نظرية البواقي، التكاملات الحقيقية المعتلة، المتغيرات المركبة، القيمة الأساسية لكوشي، متسللة لورانت)

Applications of the residue theorem to calculate some types of defective real integrals

AML ALI
[1]Department of Mathematics ، Faculty of Education ، University of Zawia ، Zawia ، Libya
am.abdullah@zu.edu.ly

Abstract

A complex variable is a quantity that contains both a real part and an imaginary part. Complex analysis is an application of mathematics that analyses the features of functions of complex variables. Physics, engineering, and computer science are just a few of the scientific disciplines that benefit from complex analysis. In order to tackle issues that are challenging or impossible to resolve using only real variables, complex analysis is crucial. **(Chanyu Xie ،2024)**

This research provides a definition of the most important theories in complex analysis, which is called the residue theory ،which has many applications and uses in calculating path integrals because the residue theory can only be applied to path integrals, and therefore the real integral must be converted to a complex integral so that we can benefit from the theory. The residue theorem can be applied to many-connected curves as well as to an infinite

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

number of isolated anomalous points, It can also be applied to the defective integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ، as it is called the Cauchy basis value ، provided that the limit is on the right side of the integer $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$. As well as the irregular integrals involving trigonometric functions, the residue theory is useful in calculating these integrals in the form $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\cos xdx$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\sin xdx$, the defective integral is in the form $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}dx$ where $p(x)$, $q(x)$ two real polynomials do not have common factors and $q(x)$ do not have real zeros. The value of the integral can be easily calculated by finding the basic Cauchy value of the integral using the residue theorem. And the integrals of multi-valued functions when using the residue theorem ، we must choose a region within which the integration function is single-valued ، and also apply the residue theorem to calculate real integrals that include bifurcation points and secant branches and are in the form $\int_{0}^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1}dx, 0 < a < 1$ ، and this integration is of special importance in studying a function Gamma. I recommend completing this research to reach new applications of this theory due to its importance in the fields of mathematics and other sciences, as well as studying its applications to semi-analytical functions.

Key words: The Residue Theorem, Defective real integrals, Complex variable, Cauchy basis value, Lorant's Series.

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

المقدمة

يعتبر التحليل الرياضي من أكثر فروع الرياضيات أهمية نظرا لتطبيقاتها الواسعة في الحياة العملية. فالتحليل المركب بتطبيقاته واستخداماته في جميع فروع الرياضات والفيزياء والحياة اليومية، وكما في التحليل الحقيقي فان حساب التكامل له نصيب كبير من الأهمية في التحليل المركب. عندما صعب حساب بعض أشكال التكاملات الحقيقية باستخدام التحليل الرياضي جاء دور التحليل المركب ليظهر أهميته في حساب التكاملات المركبة ، و في سنة 1840 ظهور العديد من النظريات التي تدرس تكامل الدوال فيما كانت للدالة المكاملة نقاط شاذة، و لعل أهم نتيجة اسهمت في امكانية التعبير عن الدوال التحليلية على شكل متسلسلة متقاربة و تحديدا ظهور ما يسمى بمتسلسلة تايلور و متسلسلة لورانت، هذا ما اسهم بشكل كبير بظهور ما يعرف بصيغة تكامل كوشي و تعميمها و الي جانب ذلك ظهور نظرية البواقي على يد العالم كوشي التي تعد من أهم النظريات في التحليل المركب ثم الي النظرية الاساسية للبواقي و هي من النتائج الهامة التي اسهمت في تعميق نظرية كوشي للتكامل المحدد، و في مضمونها قد حولت عملية حساب التكامل الي عملية حساب البواقي للدالة المكاملة عند نقاطها الشاذة المعزولة، لتعرف على طريقة تحويل التكاملات الحقيقية الى تكاملات مركبة. ولتطبيق نظرية البواقي لحساب التكاملات المعتلة على الصورة $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ يسمى بالقيمة الاساسية لكوشي التكامل، بشرط وجود النهاية. و التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$ حيث $p(x)$, $q(x)$ كثيرتي حدود حقيقية ليس بينهما عوامل مشتركة و أن $q(x)$ ليس لها أصفار حقيقية، فيمكن حساب القيمة التي يقترب منها هذا التكامل بسهولة و ذلك بإيجاد قيمة كوشي الاساسية باستخدام نظرية البواقي. و كذلك التكاملات المعتلة المشتملة على دوال مثلثية $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos xdx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin xdx$ نستطيع ايجاد قيمة التكامل باستخدام نظرية البواقي، و أيضا استخدام نظرية البواقي في حساب

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

التكاملات الحقيقية تتضمن نقط تفرع و فروع قاطعة $\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1} dx, 0 < a < 1$ و هذا التكامل له أهمية خاصة في دراسة دالة جاما، و كذلك تكاملات تحتوي دوال متعددة القيم و عند استخدام نظرية البواقي يجب أن نختار منطقة تكون دالة التكامل بداخلها و حيدة القيمة.

1-كوشي-ريمان

معادلة كوشي ريمان التفاضلية في التحليل المركب عبارة عن معادلتين تفاضليتين جزئيين، وتكون قابلة للتفاضل في مجموعات مفتوحة سميت باسم كوشي ريمان. وهذا النظام من المعادلات ظهر لأول مرة في كتابات دالميرت و ربط العالم اويلر نظام المعادلات بالنظام التحليلي. (**Ahlfors، 1979**)

2-نظرية كوشي للتكامل

لتكن R منطقة بالمستوى المركب محاطة بمنحنى مغلق بسيط C و بالاتجاه الموجب و لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية في كل نقاط R بضمنها المحيط C و لتكن $f'(z)$ مستمرة في R عندئذ $\oint_c f(z)dz = 0$. (**أمل علي-2023**)

3-البواقي

يقال للنقطة z_0 أنها نقطة شاذة لدالة ما f اذا لم تكن f تحليلية عند z_0 و لكنها تكون تحليلية عند نقطة من نقاط أي جوار للنقطة z_0. و يقال للنقطة الشاذة z_0 أنها معزولة اذا كان يوجد جوار للنقطة z_0 تكون الدالة f تحليلية عند كل نقطة من نقاطه فيما عدا النقطة z_0.

لتكن z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة التحليلية $f(z)$ على المنحنى البسيط المغلق c، الجزء الاساسي من متسلسلة لورانت للدالة $f(z)$ عند z_0 لذلك يسمى بواقي $f(z)$ و يمكن كتابتها بالصورة $\operatorname{Re} s[f(z), z_0]$. (**Qian Yang، authors، 2023**).

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/ 2024م

3-1 مثلا

الدالة $f(z)=\frac{1}{z}$ فان هذه الدالة تحليلية عند جميع النقط عدا النقطة $z=0$ و بالتالي فان هذه النقطة تكون نقطة شاذة معزولة لهذه الدالة.

اذا كانت z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة f فانه يوجد عدد حقيقي موجب r_1 بحيث تكون الدالة f تحليلية عند كل نقطة z بحيث $0<|z-z_0|<r_1$ في هذه النطاق تمثل الدالة بمتسلسلة لورانت

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\dots \qquad \to (1)$$

حيث b_1 يعطى بالتكامل الاتي

$$b_1=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz$$

حيث c أي كفاف مغلق بسيط حول z_0 ، و اتجاهها الدوراني هو الاتجاه الموجب، بحيث تكون الدالة f تحليلية عند كل نقطة من نقط c أو داخلية c عدا النقطة z_0 للعدد المركب b_1، و هو معامل $\frac{1}{z-z_0}$ في المفكوك (1)، يسمى باقي (Residue) للدالة f عند النقطة الشاذة المعزولة z_0. **(وليام ر.دريك، 2004)**

3-1 نظرية الباقي (The Residue Theorem)

اذا كان للدالة f عدد محدود فقط من النقط الشاذة، تنتمي الى داخلية كفاف مغلق بسيط c فان هذه النقط الشاذة لابد و أن تكون معزولة.

3-2 الجزء الاساسي من دالة (The principal part of a function)

اذا كان لدالة ما f نقطة شاذة معزولة z_0 ، فان الدالة يمكن تمثيلها بمتسلسلة لوران:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n} \qquad \to (2)$$

في نطاق ما $0<|z-z_0|<r_1$ مركزه z_0 . الجزء الذي يحوي القوى السالبة للمقدار $z-z_0$ يسمى بالجزء الاساسي للدالة f عند z_0 . باستخدام الجزء الاساسي من

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

دالة ما للتمييز بين ثلاث أنواع من النقاط الشاذة المعزولة: اذا كانت فئة الحدود غير الصفرية في الجزء الأساسي من الدالة f عند z_0 غير خالية و تحتوي على عدد محدود من العناصر، فأنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث

$$b_{m+1} = b_{m+2} + \ldots = 0, \quad b_m \neq 0$$

أي أن المفكوك في المعادلة (2) يكون على الصورة

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \qquad \rightarrow (3)$$

حيث $0 < |z - z_0| < r_1$. في هذه الحالة تسمى النقطة الشاذة المعزولة z_0 قطبا من الدرجة m. أما القطب من درجة $m = 1$ تسمى قطبا بسيطا، و عندما يحتوي الجزء الأساسي من دالة f عند z_0 عددا لا نهائيا من الحدود الغير صفرية فان النقطة z_0 يقال لها نقطة شاذة أساسية، و قد توصل العالم بيكارد الى نتيجة هامة تنص على أنه في أي جوار لنقطة شاذة أساسية تأخذ الدالة كل قيمة محدودة، مع استثناء وحيد محتمل ، عددا لا نهائيا من المرات. عندما تكون كل المعاملات b_n في الجزء الأساسي من دالة f عند نقطة شاذة معزولة z_0 مساوية للصفر فان النقطة z_0 يقال لها نقطة شاذة مزاله للدالة f. في هذه الحالة تحوي متسلسلة لورانت القوى الغير سالبة فقط للعدد $z - z_0$ فإنها في هذه الحالة تكون متسلسلة القوى.

3-3 تعريف:

يسمى العامل a_{-1} في سلسلة لورانت للتابع f عند النقطة الشاذة المعزولة z_0 راسب للتابع f عند z_0 و يكتب $a_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0)$.

3-3-1 مثال

أوجد الباقي عند $z = 0$ للدالة $f(z) = ze^{\frac{3}{z}}$ و احسب قيمة $\oint\limits_{|z|=4} ze^{\frac{3}{z}} dz$.

تم استلام الورقة بتاريخ: 5/ 10/ 2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

من متسلسلة تايلور نجد $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ ، فان متسلسلة لورانت للدالة $f(z)=ze^{\frac{3}{z}}$ عند $z=0$ يكون

$$ze^{\frac{3}{z}}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{3}{z}\right)^n=z+3+\frac{3^2}{2!z}+\frac{3^3}{3!z^2}+\dots$$

$$\therefore \operatorname{Re}s(0)=\frac{3^2}{2!}=\frac{9}{2}$$

$$\oint_{|z|=4} ze^{\frac{3}{z}}dz=2\pi i\left[\operatorname{Re}s(0)\right]=2\pi i\cdot\frac{9}{2}=9\pi i$$

3-4 نظرية كوشي للبواقي

اذا كانت النقاط $z_k;k\le m$ أقطاب للتابع f و كانت قيمة الباقي للتابع عند كل قطب هي $\operatorname{Re}s(f,z_k)$ فان تكامل التابع f بالنسبة الي المسار c مغلق و بسيط يقع داخله n قطب يعطى بالعلاقة:

$$\int_c f(z)dz=2\pi i\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Re}s(f,z_k)\ .$$ **(عهد عون، 2016)**

3-5 حساب قيم البواقي

لكي نحصل على متبقي الدالة $f(z)$ عند $z=a$ فانه يجب أن نحصل على مفكوك لورانت للدالة $f(z)$ حول $z=a$. في الحالة التي تكون فيها $z=a$ قطبا من الرتبة k توجد قيمة بسيطة للعامل a_{-1} تعطى بالعلاقة:

$$R(f,a)=a_{-1}=\lim_{z\to a}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left\{(z-a)^k f(z)\right\}$$

$$a_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

تم استلام الورقة بتاريخ: 5/ 10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

مثال 3-5-1

اذا كان $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ فان $z=1$ ، $z=-1$ هما قطبان من الرتبة الاولى و الثانية على الترتيب، عندما $k=2$ نحصل على

$$\operatorname{Re}s(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)\left\{\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right\}=\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Re}s(f,-1)=\lim_{z\to -1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z+1)^2\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right\}=\frac{1}{4}$$

اذا كانت $z=a$ نقطة شاذة أساسية، فانه يمكن ايجاد المتبقي أحيانا باستخدام مفكوك المتسلسلات(تايلور و اورانت). **(موراى ر.شبيجل، 2000)**

مثال 3-5-2

أوجد بواقي الدالة $f(z)=\dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ عند جميع أقطابها.

الدالة $f(z)$ لها قطب من الرتبة الثانية عند $z=-1$ و قطبان بسيطان عند

$$z=\pm 2i$$

طريقة (1)

$$\operatorname{Re}s(-1)=\lim_{z\to -1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z+1)^2\cdot\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right\}=$$

$$\lim_{z\to -1}\frac{(z^2+4)(2z-2)-(z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2}=\frac{-14}{25}$$

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

$$\operatorname{Re}s(2i)=\lim_{z\to 2i}\left\{(z-2i)\cdot\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)}\right\}=\frac{-4+4i}{(-2i+1)^2(-4i)}=\frac{7+i}{25}$$

$$\operatorname{Re}s(-2i)=\lim_{z\to -2i}\left\{(z+2i)\cdot\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)}\right\}=$$

$$\frac{-4+4i}{(-2i+1)^2(-4i)}=\frac{7-i}{25}$$

طريقة (2)

المتبقي عند $z=2i$ هو

$$\lim_{z\to 2i}\left\{\frac{(z-2i)(z^2-2z)}{(z+1)^2(z^2+4)}\right\}=\left\{\lim_{z\to 2i}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2}\right\}\left\{\lim_{z\to 2i}\frac{z-2i}{z^2+4}\right\}=$$

$$\frac{-4-4i}{(2i+1)}\cdot\lim_{z\to 2i}\frac{1}{2z}=\frac{7+i}{25}$$

و ذلك باستخدام قاعدة لوبيتال. و بطريقة متماثلة أو بإحلال $-i$ بدلا من i، نحصل على المتبقي عند $z=-2i$.

4-حساب التكاملات المثلثية على الشكل $\int_0^{2\pi}F(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$

نظرية البواقي لا نستطيع تطبيقها الا على تكاملات المسار، و منه فيجب تحويل التكامل الحقيقي الى تكامل مركب كالاتي:-

نفرض أن المسار c دائرة الوحدة $|z|=1$ المعرفة وسيطيا بالصيغة الاتية،

$$z=e^{i\theta};\qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

و أيضا $dz=izd\theta$، و حسب قوانين أويلر فان:

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\quad,\qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

و بالتعويض نجد أن

تم استلام الورقة بتاريخ: 5/ 10/ 2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right) \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - z^{-1}\right)$$

و بالتعويض في شكل التكامل نجد أن

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \int_c F\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right)\frac{dz}{iz}$$

بوضع

$$G(z) = \frac{1}{iz}F\left[\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right]$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} F\left(\cos\theta, \sin\theta\right)d\theta = \int_c G(z)dz = 2\pi i\sum_{i=0}^{n} \operatorname{Res}(G, z_k)$$

حيث z_k أقطاب تحقق $|z_k| < 1$. **(مجدي الطويل، 2005)**

1-4 مثال

احسب $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin\theta}$

باستخدام نظرية البواقي، نستخدم المسار الدائري $|z| = 1$ فان

$d\theta = \dfrac{dz}{iz} \quad , \quad \sin\theta = \dfrac{z - \frac{1}{z}}{2i}$ و بالتالي فان

$$\frac{d\theta}{2 + \sin\theta} = \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}} = \frac{2idz}{4i + z - \frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{iz} = \frac{2zdz}{z^2 + 4iz - 1} \cdot \frac{1}{z} = \frac{2dz}{z^2 + 4iz - 1}$$

تم استلام الورقة بتاريخ: 5/ 10/ 2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/ 2024م

و لكن $z^2+4iz-1=0$ تعطي الجذرين $z=(-2\pm\sqrt{3})i$ و العبرة بالذي داخل المسار و هو $z=(-2+\sqrt{3})i$ حيث $\left|-2+\sqrt{3}\right|<1$ و بالتالي فان

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{2dz}{(z^2+4iz-1)}=2\pi i(\operatorname{Res}(-2i+i\sqrt{3}))$$

$$\operatorname{Res}(-2i+i\sqrt{3})=\lim_{z\to(-2+\sqrt{3})i}\frac{(z-(-2+\sqrt{3})i)2}{(z-(-2+\sqrt{3})i)(z-(-2-\sqrt{3})i)}=\frac{2}{(-2+\sqrt{3})i)}$$

$$\therefore\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{2dz}{(z^2+4iz-1)}=2\pi i(\operatorname{Res}(-2i+i\sqrt{3}))=2\pi i(\frac{2}{-2i+i\sqrt{3}})=\frac{4\pi i}{-2i+i\sqrt{3}}$$

5 التكاملات المعتلة على الصورة $-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$

التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ متقارب(convergent) حيث ان الدالة f دالة مستمرة لجميع قيم x ، اذا كانت النهاية موجودة لكل من هذين التكاملين

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0}f(x)dx+\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R}f(x)dx\quad\to(1)$$

و يمكن كتابة المعادلة (1) بالشكل

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx\quad\to(2)$$

يطلق على التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ اسم القيمة الاساسية لكوشي للتكامل

(Cauchy basis value)

تم استلام الورقة بتاريخ: 5/ 10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

بشرط وجود النهاية في الطرف الأيمن. فاذا كان التكامل متقارب فان قيمته هي القيمة الاساسية لكوشي. و على العكس. **(سمير البشير حديد واخرون، 1980)**

مثال 5-1

عند $f(x) = x$ فان القيمة الاساسية للتكامل $\int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$ بينما التكامل غير متقارب من المعادلة (1).

لتكن f دالة زوجية عندئذ $f(x) = f(-x)$ لكل x. اذا كانت القيمة الاساسية لكوشي للتكامل موجودة عندئذ التكامل موجود، باعتبار أن f زوجية و

أن $$\int_{-R}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{R} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

و هكذا وجود النهاية في المعادلة (2) يؤدي الى وجود كل من النهايتين في المعادلة (1) عندما f دالة زوجية.

5-2 التكامل المعتل على الصورة $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}dx$

التكامل المعتل على الصورة $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}dx$ حيث $p(x), q(x)$ كثيرتي حدود حقيقية ليس بينهما عوامل مشتركة و أن $q(x)$ ليست لها أي أصفار حقيقية. اذا كانت درجة $q(x)$ أكبر من درجة $p(x)$ على الاقل بدرجتين فان التكامل يكون تقاربي. ويمكن حساب القيمة التي يقترب منها هذا التكامل بسهولة وذلك بإجاد قيمة كوشي الاساسية باستخدام نظرية البواقي.

5-2-1 مثال

احسب قيمة التكامل $\int_{0}^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$

$$\because \int_{0}^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$$

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

التكامل في الطرف الايمن يمثل تكاملا للدالة

$$f(z)=\frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}=\frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

على امتداد المحور الحقيقي. و هذه الدالة لها أقطاب بسيطة عند النقطتين $z=\pm i$, $z=\pm 2i$ و هي دالة تحليلية، فيما عدا ذلك عندما $R>2$ فان النقط الشاذة للدالة f في نصف المستوى العلوي تنتمي الى داخلية المنطقة النصف دائرية المحدودة بالقطعة المستقيمة $y=0, \quad -R\le x\le R$ على محور السينات و النصف العلوي C_R من الدائرة $|Z|=R$. بمكاملة الدالة $f(x)$ في اتجاه ضد عقارب الساعة حول حدود هذه المنطقة النصف دائرية نجد أن:

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx+\int_{C_R} f(z)dz=2\pi i(B_1+B_2) \qquad \to (1)$$

حيث B_1 باقي للدالة f عند النقطة $z=i$ ، B_2 هو باقي الدالة f عند النقطة $z=2i$

$$\operatorname{Res}(f,i)=B_1=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\frac{i}{2}$$

$$\operatorname{Res}(f,2i)=B_2=\lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)=\frac{-3i}{4}$$

و بالتالي

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx=\frac{\pi}{2}-\int_{C_R} f(z)dz \qquad \to (2)$$

فان قيمة التكامل في الطرف الأيمن من المعادلة (2) تقترب من الصفر عندما $R\to\infty$. لتحقيق ذلك

$$|z^4+5z^2+4|=|z^2+1||z^2+4|\ge(|z|^2-1)(|z|^2-4)$$

عندما تكون z نقطة من نقاط C_R فان $|z^4+5z^2+4|\ge(R^2-1)(R^2-4)$

تم استلام الورقة بتاريخ: 5/ 10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

كذلك لكل نقطة من نقط C_R تكون $\left|2z^2-1\right| \le 2|z|^2+1 = 2R^2+1$ ، و بالتالي

فان
$$\left|\int_{C_R}\frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}dz\right| \le \frac{2R^2+1}{(R^2-1)(R^2-4)}\pi R$$

حيث πR طول القوس C_R و بالتالي فان $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$

$$\therefore \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx = \frac{\pi}{2}$$

و حيث أن التكامل يكون في الحقيقة تقاربي، فان $\int_0^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx = \frac{\pi}{4}$

5-2-2- مثال

احسب $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}dx$

لتكن $f(z) = \frac{z^2}{z^6+1}$ ، نعتبر كفافا نصف دائرة مركزها نقطة الاصل، و تقع في النصف العلوي من المستوى فان $|z| \to \infty$, $f(z) \to 0$ ، الدالة $f(z)$ ليست تحليلية عندما $z^6+1=0$

و بالتالي $z^6 = -1$ ، $\therefore z = (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{6}}$ ، لنحسب الجذور

$$\therefore \quad z = \left(\cos(2n\pi+\pi) + i\sin(2n\pi+\pi)\right)^{\frac{1}{6}}, \quad n = 0,1,2,3,4,5$$

فان الجذور هي

تم استلام الورقة بتاريخ: 5/ 10/ 2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

$$\alpha_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=e^{\frac{i\pi}{6}}$$
$$\alpha_1=\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}=e^{\frac{i\pi}{2}}$$
$$\alpha_2=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=e^{\frac{5\pi i}{6}}$$
$$\alpha_3=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=e^{\frac{7\pi i}{6}}$$
$$\alpha_4=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=e^{\frac{3\pi i}{2}}$$
$$\alpha_5=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=e^{\frac{11\pi i}{6}}$$

و لكن $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ تقع فقط في الجزء العلوي من المستوى و بالتالي فان البواقي للدالة $f(z)$ عند $z=\alpha_0$

$$\operatorname{Res}(f,\alpha_0)=\lim_{z\to\alpha_0}\frac{\frac{d}{dz}\left[(z-\alpha_0)z^2\right]}{\frac{d}{dz}(z^6+1)}$$
$$=\lim_{z\to\alpha_0}\frac{2z(z-\alpha_0)+z^2}{6z^5}=\frac{\alpha_0{}^2}{6\alpha_0^5}=\frac{1}{6\alpha_0^3}$$

و بالمثل

$$\operatorname{Res}(f,\alpha_1)=\frac{1}{6\alpha_1^3}$$
$$\operatorname{Res}(f,\alpha_2)=\frac{1}{6\alpha_2^3}$$
$$\therefore\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}dx=2\pi i\left[\frac{1}{6\alpha_0^3}+\frac{1}{6\alpha_1^3}+\frac{1}{\alpha_2^3}\right]=\frac{\pi}{3}$$

3-5-تكاملات معتلة مشتملة على دوال مثلثية

نظرية البواقي تكون مفيدة في حساب التكاملات التقاربية التي على الصورتين

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/ 2024م

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos x dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin x dx \qquad \to (1)$$

حيث $p(x)\,,q(x)$ كثيرتي حدود حقيقية، $q(x)$ ليس لها أصفار حقيقية، و التكامل (1) هو الجزء الحقيقي ، و الجزء التخيلي للتكامل هو $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}e^{ix}dx$ و أن مقياس e^{iz} يساوي e^{-y} حيث e^{-y} تكون محدودة في نصف المستوى العلوي. **(دويل ف.تشرشل، و اخرون، 1998)**

5-3-1-مثال

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{e}$$

نلاحظ أن هذا التكامل هو الجزء الحقيقي للتكامل $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx$ و الذي يمثل بدوره تكامل الدالة $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ على المحور الحقيقي للدالة f التحليلية فيما عدا عند القطبين $z=\pm i$ من الدرجة $m=2$. القطب $z=i$ ينتمي الي داخلية المنطقة النصف دائرية التي حدودها القطعة المستقيمة $y=0\,,-R\le x\le R$ على المحور الحقيقي و النصف العلوي C_R من الدائرة $|z|=R$، حيث $R>1$.

بمكاملة الدالة f في اتجاه ضد عقارب الساعة حول حدود هذه المنطقة نجد أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx = 2\pi i B_1 - \int_{C_R}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz \qquad \to (1)$$

حيث B_1 باقي f عند القطب $z=i$. لحساب هذا الباقي

$$\phi(z)=(z-i)^2 f(z)=\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}$$

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

$\rightarrow (2)$ $B_1 = \phi'(i) = \dfrac{-i}{2e}$. لنبين أن $\displaystyle\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz$ يقترب من الصفر عندما تؤول $R \to \infty$

نلاحظ أنه عندما تنتمي z الى C_R فان $\left|z^2+1\right|^2 \geq \left(R^2-1\right)^2$

$$\left| \int \frac{e^{iz}}{\left(z^2+1\right)^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}$$

وذلك حيث أن $\left|e^{iz}\right| = \left|e^{-y}\right| \leq 1$ عندما $y \geq 0$، من هذه المتباينة و معادلتي (2)، (1) ينتج أن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{e} \qquad \rightarrow (3)$$

أي أن $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{e}$ و ذلك بمساواة الجزئيين الحقيقيين في طرفي المعادلة (3). اذا قيمة كوشي الأساسية للتكامل $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{e}$ ، و كذلك يمكن استنتاج أن التكامل $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$ يؤول الى القيمة $\dfrac{\pi}{e}$ و ذلك لأن الدالة المكاملة دالة زوجية.

5-3-2-نظرية

لتكن $F(z)$ خارج قسمة كثيرتي حدود في z بحيث أن:

1- $F(z)$ ليس لها أقطاب على المحور الحقيقي.

2- $F(\frac{1}{z})$ لها جدر من الرتبة 2 على الأقل عند $z = 0$ أي أن درجة المقام تتجاوز درجة البسط بمقدار 2 على الأقل عندها يكون

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\begin{Bmatrix}\cos ax\\ \sin ax\end{Bmatrix}dx=\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}(z)\\ \mathrm{Im}(z)\end{Bmatrix}2\pi i\sum_{y>0}\mathrm{Re}\,sF(z)e^{iaz},\quad a\geq 0$$

أو
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{iax}dx=2\pi i\{\sum_{y>0}\mathrm{Re}\,sF(z)e^{iaz}+\frac{1}{2}\sum_{y=0}\mathrm{Re}\,sF(z)e^{iaz}\}$$

و يؤخذ المجموع فقط على أقطاب $F(z)$ في نصف المستوى العلوي.**(وليام دريك، 2004)**

5-4-التكامل حول نقطة تفرع

استخدام نظرية البواقي في حساب التكاملات الحقيقية تتضمن نقط تفرع و فروع قاطعة. لنفرض أن x^{-a} ترمز للقيمة الأساسية للدالة الأسية، حيث $0<a<1,\quad x>0$. أي أن x^{-a} هو العدد الحقيقي الموجب exp(-a log x). نقوم بحساب التكامل الحقيقي المعتل $\int_0^{\infty}\frac{x^{-a}}{x+1}dx,\quad 0<a<1\quad\to(1)$ و هذا التكامل ذو أهمية خاصة في دراسة دالة جاما(Gamma function) يتحقق وجود هذا التكامل عندما $0<a<1$ و ذلك حيث أن الدالة المكاملة تتصرف مثل x^{-a} بالقرب من $x=0$ و بالمثل x^{-a-1} عندما تؤول x الي ∞. و لحساب التكامل (1) ليكن التكاملين الخطيين $\int_{c_1} f_1(z)dz\,,\quad \int_{c_2} f_2(z)dz$ حيث

$$f_1(z)=\frac{z^{-a}}{z+1}\left(|z|>0,\ \frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f_2(z)=\frac{z^{-a}}{z+1}\left(|z|>0,\ \frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{5\pi}{2}\right)$$

حيث c_2 ، c_1 هما الكفافان المغلقان البسيطان $p<1<R$ و الزاوية ϕ بحيث $\frac{\pi}{2}<\phi<\pi$، نلاحظ أن الدالة f_1 تحليلية عند جميع نقط الكفاف c_1 و داخليته و بالتالي فان $\int_{c_1} f_1(z)dz=0$، بالإضافة الى ذلك فان الدالة f_2 تحليلية لجميع

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

الكفاف c_2 و داخليته فيما عدا عند القطب البسيط $z=-1$ الذي ينتمي الي داخلية c_2. من تعريف الدالة f_2 نجد $z^{-a}=\exp[-a(\log|z|+i\arg z)]$

حيث $\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{5\pi}{2}$ و باقي f_2 عند القطب $z=-1$ هو

$$\lim_{z\to -1}(z+1)f_2(z)=\lim_{z\to -1}z^{-a}=\exp(-a\pi i)$$

$$\therefore \int_{c_2} f_2(z)dz=2\pi i\exp(-a\pi i) \qquad \to (3)$$

و حيث أن $f_1(z)=f_2(z)$ على الشعاع $\arg z=\phi$ يكون من الصحيح أن

$$\int_{c_1} f_1(z)dz+\int_{c_2} f_2(z)dz=\int_{\rho}^{R} f_1(x)dx-\int_{\rho}^{R} f_2(x)dx+\int_{\Gamma_1} f_1(z)dz+$$
$$\int_{\Gamma_2} f_2(z)dz+\int_{\gamma_1} f_1(z)dz+\int_{\gamma_2} f_2(z)dz \qquad \to (4)$$

حيث Γ_k القوس الدائري الأكبر، γ_k القوس الدائري الأصغر من الكفاف المغلق البسيط c_k حيث $k=1,2$، و عندما تنتمي z الى $\Gamma_k;(k=1,2)$ فان $|f_k(z)|=\left|\frac{z^{-a}}{z+1}\right|\le\frac{R^{-a}}{R-1}$، و حيث ان القوس Γ_k جزء من الدائرة التي محيطها $2\pi R$ فان $\left|\int_{\Gamma_k} f_k(z)dz\right|\le\frac{R^{-a}}{R-1}2\pi R$، و عندما تنتمي z الي $\gamma_k;(k=1,2)$ فان

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_k} f_k(z)dz=0 \qquad \to (5)$$

$$|f_k(z)|=\left|\frac{z^{-a}}{z+1}\right|\le\frac{\rho^{-a}}{1-\rho}$$

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

و بالتالي فان $\left| \int_{\gamma_k} f_k(z)dz \right| \leq \frac{\rho^{-a}}{1-\rho} 2\pi\rho$ و

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_k} f_k(z)dz = 0 \, , (k = 1,2) \qquad \to (6)$$

و من المعادلة (4) و النتائج السابق الحصول عليها في المعادلتين (5)، (6) و كذلك المعادلتين (2)، (3) ينتج أن

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \rho\to 0}} \left(\int_{\rho}^{R} f_1(x)dx - \int_{\rho}^{R} f_2(x)dx \right) = 2\pi i \exp(-a\pi i)$$

حيث أن

$$\int_{\rho}^{R} f_1(x)dx - \int_{\rho}^{R} f_2(x)dx = \int_{\rho}^{R} \frac{1}{x+1} \left[e^{-a\log x} - e^{-a(\log x + 2\pi i)} \right] dx$$

$$= \int_{\rho}^{R} \frac{x^{-a}}{x+1} (1 - e^{-2\pi a i}) dx$$

فإننا نحصل على

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \rho\to 0}} \int_{\rho}^{R} \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{2\pi i \exp(-a\pi i)}{1 - \exp(-2a\pi i)}$$

أي أن

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}; \qquad (0 < a < 1)$$

(موراي ر.شبيجل، 2000)

5-5-تكامل الدوال متعددة القيم

عندما نتعامل مع تكاملات تحتوي على دوال متعددة القيم، يجب أن نأخذ في الحسبان نقط التفرع (branch points)، و قواطع التفرع (branch cuts) لدالة التكامل، بالإضافة الى النقاط الشاذة المنعزلة(isolated singularities)، و السبب في ذلك أنه عند استخدام نظرية البواقي يجب أن نختار منطقة تكون دالة التكامل بداخلها وحيدة القيمة.

تم استلام الورقة بتاريخ: 5/ 10/ 2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/ 2024م

5-5-1-نظرية

اذا كانت $F(z)$ خارج قسمة كثيرتي حدود في z و تحقق:

1- $F(z)$ ليس لها أقطاب على الجزء الحقيقي الموجب.

2- $z^{a+1}F(z)$ تنعدم عندما تؤول z الي الصفر أو ∞، حيث a عدد حقيقي، فان:

$$\int_0^\infty x^a F(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}} \sum_{z\neq 0} \operatorname{Res}(z^a F(z))$$

و ذلك بأخذ المجموع على أقطاب الدالة الغير صفرية. **(وليام ر.دريك، 2004)**

الخلاصة

عند دراسة الدوال للمتغيرات المركبة فان نظرية البواقي تلعب دورا مهما للعديد من التطبيقات و الاستخدامات في حساب التكاملات على المسار، و منه فيجب تحويل التكامل الحقيقي الى تكامل مركب. وفي هذا البحث استخدمت تطبيق نظرية البواقي على التكاملات الحقيقية المعتلة.

و كذلك التكاملات المعتلة المشتملة على دوال مثلثية فان نظرية البواقي تكون مفيدة في حساب هذه التكاملات التي على الصورة $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin xdx$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos xdx$ ، و التكامل المعتل على الصورة $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$ حيث $p(x)$, $q(x)$ كثيرتي حدود حقيقية ليس بينهما عوامل مشتركة و أن $q(x)$ ليس لها أصفار حقيقية، فيمكن حساب قيمة التكامل بسهولة و ذلك بإيجاد قيمة كوشي الأساسية للتكامل باستخدام نظرية البواقي.

و كدلك لها العديد من التطبيقات الاخرى، لما لها من نطاق واسع من الاستخدامات في الفيزياء و الكيمياء و غيرها من المجالات الاخرى. و بالتالي فان نظرية البواقي توفر أداة مفيدة لحل المشاكل المعقدة و التي قد تكون من الصعب التعامل معها باستخدام الاساليب التقليدية.

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

التوصيات

في ختام هذا البحث الذي درسنا فيه نظرية البواقي وتطرقنا الي بعض تطبيقاتها في حساب التكاملات الحقيقية حيث تعتبر نظرية البواقي احدى أهم النظريات في التحليل المركب، أوصي بإكمال هذا البحث للوصول الى تطبيقات جديدة لهذه النظرية لأهميتها في المجالات الرياضية، و كذلك تطبيقها على الدوال الشبه تحليلية.

المراجع

1-أمل على (2023). المقارنة للإيجاد قيمة التكامل للدوال المركبة بين صيغتا كوشي التكاملية و نظرية البواقي. مجلة القلم للعلوم التطبيقية. جامعة طرابلس الأهلية. الاصدار 6. ص ص(904-908)
2-دويل ف.تشرشل و اخرون(1998). المتغيرات المركبة و تطبيقات. الدار الدولية للنشر و التوزيع. ص ص(189-200).
3-سمير البشير حديد و اخرون(1980). الدوال المعقدة للصف الثالث فيزياء في كليات التربية. جامعة الموصل. دار الكتب و الوثائق الوطنية بغداد. ص ص(252-259).
4-عهد عون(2016). نظرية الرواسب و تطبيقاتها في حساب التكاملات الحقيقية.
5-مجدي الطويل(2005). مقدمة في علم التحليل المركب. دار النشر للجامعات. جامعة القاهرة.ص ص(199-216).
6-موراي ر.شبيجل(2000). الدوال المركبة مع مقدمة في التناظر الحافظ للزوايا و تطبيقاته. الدار الدولية للاستثمارات الثقافية. ص ص(240-280).
7-وليام ر.دريك(2004). التحليل المركب و تطبيقاته. دار النشر العلمي و المطابع جامعة الملك سعود. ص ص(195-203).
8-Ahlfors(1979). Complex Analysis ، 3rd Edition ، page(148-150).
9-Chanyu Xie(2024) ، Applications of Residue Theorem to some selected integrals ، Highlights in Science ، Engineering and Technology ، Volume88.

تم استلام الورقة بتاريخ: 5 /10 /2024م وتم نشرها على الموقع بتاريخ: 30/ 1/2024م

10-Qian Yang ، authors(2023) ، complex function and Residue theorem ، Highlights in Science ، Volume 38.

